La fonction logarithme népérien

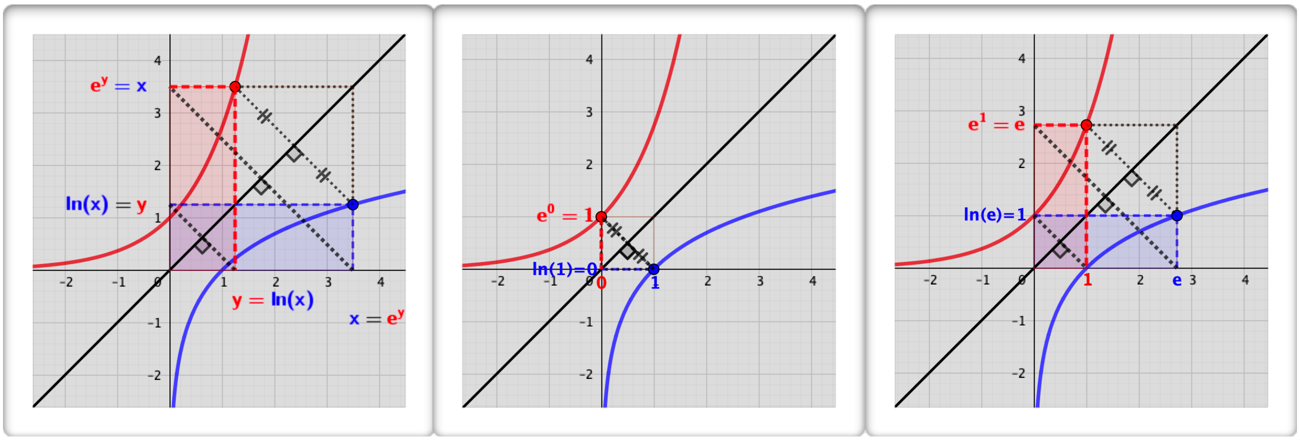
1) Définition

Pour tout réel x > 0 le logarithme népérien de x, noté ln(x), est l'unique solution de l'équation $e^y = x$ $\mathbf{e^y = x \iff y = \ln(x)}$

La fonction exponentielle **exp** et la fonction logarithme népérien **ln** sont réciproques

$\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x$ ou bien $\mathbf{\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x}$

Graphiquement, **les courbes sont symétriques** par rapport à la droite d'équation y=x



$\mathbf{e^y = x \iff y = \ln(x)}$
$\mathbf{\ln(x) = y \iff x = e^y}$ $e^0=1$ donc $\mathbf{\ln(1)=0}$ $e^1=e$ donc $\mathbf{\ln(e)=1}$

2) Etude de la fonction ln

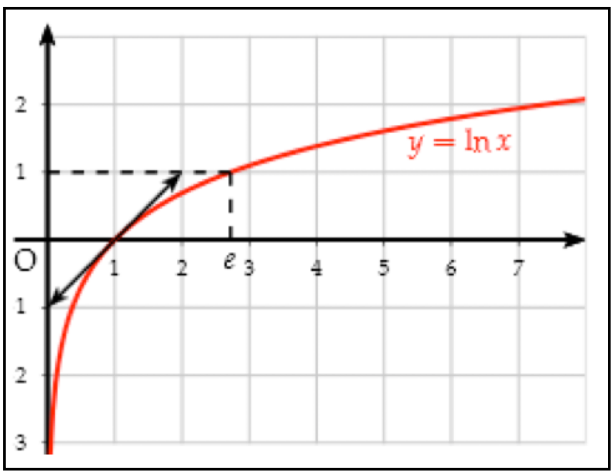
Ensemble de définition : C'est l'intervalle $]0\,;+\infty[$ (ln(0), ln(-2), ln(-3,45) etc n'existent pas)

Dérivée : Sa dérivée est : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

Sens de variation :
La fonction ln est **strictement croissante** sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$
En effet, sa dérivée $\dfrac{1}{x}$ est strictement positive

(en particulier ln'(1) =1 : le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal à 1)

Remarque : Plus x augmente, plus la croissance de la fonction ln est lente



Convexité :
La fonction ln est **concave** sur] 0 ; +∞ [
En effet, sa dérivée seconde $\frac{-1}{x^2}$ est négative

Equations et inéquations

a = b $\Longleftrightarrow$ ln(a) = ln(b) car la fonction ln est monotone sur] 0 ; +∞ [
a < b $\Longleftrightarrow$ ln(a) < ln(b) car la fonction ln est strictement croissante sur] 0 ; +∞ [

3) Propriétés de calcul

Relation fonctionnelle

La fonction exp transforme une addition en multiplication
exp(a + b) = exp(a) exp(b) qu'on écrit $e^{a+b} = e^a \times e^b$

La fonction ln transforme une multiplication en addition

Pour tous réels a et b strictement positifs : **ln(ab) = ln(a) + ln(b)**

Conséquences : pour tous réels a et b strictement positifs
$\ln(a^n) = n\ln(a)$ $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln(b)$

Exemple de résolution d'équations avec des logarithmes népériens

Un capital de 1000€ est placé à un taux annuel de 4%
Au bout de combien d'années le capital va-t-il doubler ?